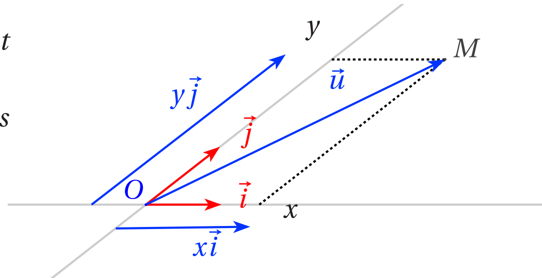
1 Calcul vectoriel

1.1 coordonnées d'un vecteur dans un repère

Définition 1. *Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Pour tout point O du plan, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Les coordonnées de $\vec{u}$ dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ sont les coordonnées de M dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.*

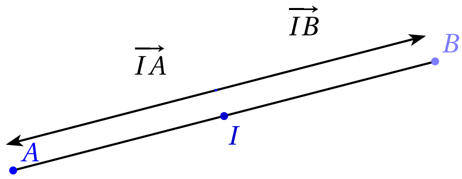


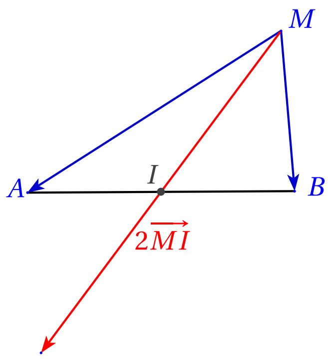
Remarque : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Propriétés 1.
Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

1.2 Caractérisation du milieu d'un segment

Propriétés 2. *Soit $[AB]$ un segment. Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si*
$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ *ce qui équivaut à* $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.





Propriétés 3. *Pour tout point M du plan on a :*
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ *où I est le milieu du segment $[AB]$.*

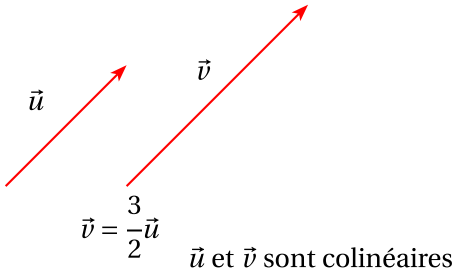
Remarque : Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont les coordonnées des points A et B alors les coordonnées de I sont $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

2 Vecteurs colinéaires

Définition 2. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si l'un des deux vecteurs est nul, ou s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.*

Remarques :

- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont même direction.

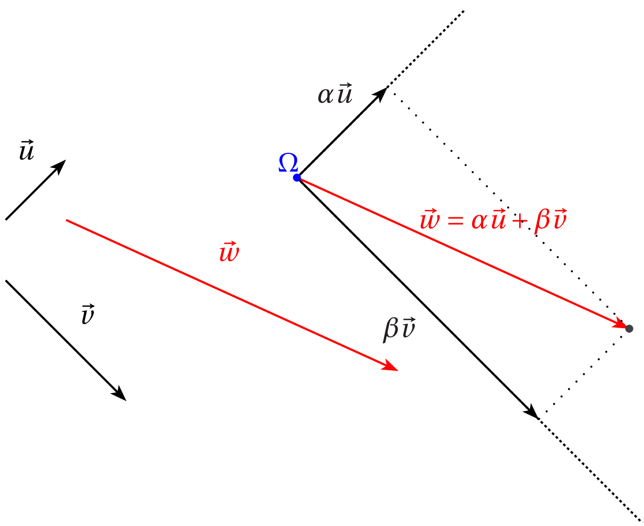


Propriétés 4.
Dans un repère, deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *sont colinéaires si et seulement si* $xy'-yx'=0$.

3 Décomposition d'un vecteur

3.1 Généralités

Propriétés 5. *Soient deux vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *non colinéaires.*
Alors pour tout vecteur $\vec{w}$ *il existe un couple unique de réels* (α,β) *tel que* $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.
On dit que $\vec{w}$ *est* ***combinaison linéaire*** *de* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.



3.2 Application aux repères du plan

- Soit O un point du plan et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Alors $(O;\vec{u},\vec{v})$ est un repère du plan.
- L'égalité $\overrightarrow{OM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ se traduit par : le point M a pour coordonnées $(\alpha;\beta)$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

4 Équations de droites

4.1 Vecteur directeur

Définition 3. *Soit une droite (d). On dit que le vecteur non nul $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (d) si il existe deux points A et B de la droite (d) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.*

Propriétés 6. *Soit A un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Alors la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.*

4.2 Équation cartésienne d'une droite

On se place dans un repère $\left(\mathrm{O} ; \vec{i}, \vec{j}\right)$du plan.

Propriétés 7.

- *Toute droite a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$.*
  Une telle équation est appelée équation cartésienne de la droite.
- *Réciproquement, si a, b et c sont trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$, alors l'ensemble des points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient $ax+by+c = 0$ est une droite de vecteur directeur vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.*

4.3 Équation réduite d'une droite

Soit (d) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

- Si $b \neq 0$ une équation de la droite (d) est : $y = mx + p$ où on a posé $m = -\dfrac{a}{b}$ et $p = -\dfrac{c}{b}$
  L'équation $y = mx + p$ est appelée équation réduite de (d).
  m est appelé coefficient directeur de la droite.
  p est l'ordonnée à l'origine.
  un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.
- Si $b = 0$, alors $a \neq 0$. L'équation réduite de (d) est $x = p$ avec $p = -\dfrac{c}{a}$.
  La droite (d) est parallèle à l'axe des ordonnées et $\vec{j}$ est un vecteur directeur.

5 EXERCICES : Les exercices de base

1. Déterminer une équation de la droite d passant par A et B :
   a. $A(3;4)$ et $B(5;6)$
   b. $A(2;3)$ et $B(-1;-1)$
   c. $A(\sqrt{2};1)$ et $B(\frac{4}{3};1)$
   d. $A(\sqrt{2};3)$ et $B(3\sqrt{2};7)$

2. Déterminer une équation de la droite d' parallèle à la droite d et passant par A :
   a. $d : 2x-3y+\sqrt{7}=0$ et $A(1;1)$
   b. $d : y=-5x+2$ et $A(-2;3)$
   c. $d : x+2y-3=0$ et $A(\frac{1}{2};\frac{2}{3})$

3. On considère un triangle ABC. Déterminer une équation de la médiane issue de :
   a. $A(2;3)$ $B(6;-3)$ $C(-8;5)$ issue de A
   b. $A(-4;3)$ $B(2;-7)$ $C(4;5)$ issue de B
   c. $A(1;8)$ $B(-3;2)$ $C(-5;4)$ issue de C

4. Déterminer l'intersection si elle existe des droites d et d' :
   a. $d : 2x-y+7=0$ et $d' : x+3y-4=0$
   b. $d : 2x+3y=5$ et $d' : x+y=-4x+7$
   c. $d : 3x-5y+7=0$ et $d' : -6x+10y+4=0$

5. Tracer :
   a. $2x-5y+7=0$
   b. $2x+5=0$
   c. $\frac{1}{2}x+3y-2=0$
   d. $y=-\frac{3}{2}$

6 EXERCICES : Les exercices de base (corrigés)

1. Une équation de la droite d passant par A et B est :
   a. $A(3;4)$ et $B(5;6)$
   $M(x;y) \in (AB)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires
   soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix}$
   La condition de colinéarité permet d'écrire $2(y-4)-2(x-3)=0$ soit $2y-2x-2=0$ et donc $x-y+1=0$.
   Une équation cartésienne de la droite (AB) est $x-y+1=0$.
   b. $A(2;3)$ et $B(-1;-1)$
   De la même manière pour le a. on obtient une équation cartésienne de la droite (AB) est : $4x-3y+1=0$.
   c. $A(\sqrt{2};1)$ et $B(\frac{4}{3};1)$
   Ici les deux points ont la même ordonnée donc une équation cartésienne de la droite (AB) est : $y-1=0$.
   d. $A(\sqrt{2};3)$ et $B(3\sqrt{2};7)$
   De la même manière que pour le a. on obtient une équation cartésienne de la droite (AB) est : $2x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}=0$.

2. a. $d: 2x-3y+\sqrt{7}=0$ et $A(1;1)$
   Deux droites sont parallèles si elles ont pour vecteurs directeurs deux vecteurs colinéaires, donc une équation cartésienne de la droite d' parallèle à la droite d sera de la forme : $2x-3y+c=0$.
   Comme elle doit passer par A, on doit avoir $2\times 1-3\times 1+c=0$ soit $c=1$
   Une équation cartésienne de d' est $2x-3y+1=0$.
   b. $d: y=-5x+2$ et $A(-2;3)$
   Une équation cartésienne de d' est $5x+y+7=0$.
   c. $d: x+2y-3=0$ et $A(\frac{1}{2};\frac{2}{3})$
   Une équation cartésienne de d' est $x+2y-\frac{11}{6}=0$.

3. Dans le triangle ABC, une équation de la médiane :
   La médiane est la droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé. a. $A(2;3)$ $B(6;-3)$ $C(-8;5$
   Soit A' le milieu de $[BC]$, on a $A'(-1;1)$.
   La médiane cherchée est donc la droite (AA'). On fait le calcul comme pour l'exercice 1 et on obtient :
   $(AA'): 2x-3y+5=0$.
   b. $A(-4;3)$ $B(2;-7)$ $C(4;5)$ issue de B
   De la même manière on obtient pour la médiane issue de B : $11x+2y-8=0$.
   c. $A(1;8)$ $B(-3;2)$ $C(-5;4)$ issue de C
   De la même manière on obtient pour la médiane issue de C : $x-4y+21=0$.

4. a. $d: 2x-y+7=0$ et $d': x+3y-4=0$
   La droite d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et La droite d' a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   La condition de colinéarité donne $1\times 1+2\times +3=7\neq 0$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires

et par conséquent les droites d et d' n'étant pas parallèles sont sécantes.

On va résoudre le système $\begin{cases} 2x - y = -7 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$ On obtient $x = -\dfrac{17}{7}$ et $y = \dfrac{15}{7}$.

Les deux droites d et d' sont donc sécantes au point $E(-\dfrac{17}{7}; \dfrac{15}{7})$.

b. $d : 2x + 3y = 5$ et $d' : x + y = -4x + 7$

On procède de la même façon et les deux droites d et d' sont donc sécantes au point $F(\dfrac{16}{13}; \dfrac{11}{13})$.

c. $d : 3x - 5y + 7 = 0$ et $d' : -6x + 10y + 4 = 0$

Ici les vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -10 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les droites d et d' n'ont pas de point d'intersection car elles sont parallèles.

5. La représentation graphique est :